سلسلة وحلول

الأستاذ القـــد (رياضيات) 2021

الإحتمالات

(الجزء الأول – A - بيراءة)

آفيير هواة

تمارين محلولة بالتفصيل الممل

يالتل يا مخلوق! ماكلاه القلق و الدوت

ياك العلم نور و دجميل...و كلش يفوت

نوصييك!

سلسلة الأستاذ القـــد (رياضيات) 2021

الإحتمالات

(الجزء الأول – A - براءة) - آفيير هواة

التمرين الأول:

- يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، منها 3 حمراء، 3 خضراء، 4 بيضاء.

1- نسحب من هذا الكيس ثلاث كرات في آن واحد.

ما احتمال الحصول على:

أ- نفس اللون؟

ب- الألوان الثلاثة؟

جـ- كرة بيضاء واحدة على الأقل؟

2- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

أ- ما هو قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X؟

ب- أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X؟

التمرين الثاني:

- زهرة نرد مكعبة (D_1) لها وجه يحمل الرقم 1 ووجهان يحملان الرقم 2 وثلاثة أوجه تحمل الرقم 3. زهرة نرد مكعبة (D_2) لها وجه يحمل الرقم 1 ووجهان يحملان الرقم 2 ووجه يحمل الرقم 3 ووجهان يحملان الرقم 4

- نفترض أن كل الأوجه في كل من المكعبين لها نفس حظوظ الظهور.

- نرمي الزهرتين في آن واحد.

- ما احتمال أن يكون الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين:

أ- زوجيين.

ب- فرديين.

التمرين الثالث:

- لدينا زهرتي نرد غير مزيفتين (كل الأوجه لها نفس احتمال الظهور):

• الأولى (D_1) مكعبة الشكل لها وجه يحمل الرقم 1 ولها n وجه يحمل الرقم 2 وبقية الأوجه تحمل الرقم 3.

• الثانية (D_2) مكعبة الشكل حيث كل وجه يحمل أحد الأرقام: 1، 2، 2، 3، 4، 4

- نرمي الزهرتين في آن واحد.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية مجموع الرقمين الظاهرين في الوجهين العلويين للزهرتين.

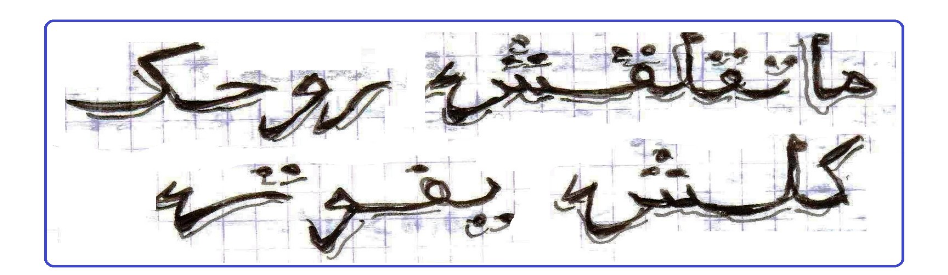
1- عين n حتى يكون احتمال الحادثة $(X=6)$ يساوي $\frac{7}{36}$

أي: $P(X=6)=\frac{7}{36}$

2- نختار الآن $n=2$ في بقية التمرين.

أ- عرف قانون احتمال X وأحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب- أحسب التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.





مع تحيات الأستاذ القـد

حلول الأستاذ القــد (رياضيات) 2021

الإحتمالات

(الجزء الأول – A - ببراءة) - آفيير هواة

حل التمرين الأول:

3R (حمراء)
3V (خضراء)
4B (بيضاء)

- نسحب في آن واحد ثلاث كرات وبالتالي فإن: $K = 3$
- عدد الكرات الكلي الموجودة في الكيس هي: $n = 10$

. ديما وديما كي يقولك "نسحب في آن واحد" فإننا نستعمل (التوفيقة C)

. ديما وديما في هذا النوع من التمارين (كيس أو صندوق يحتوي على كرات) يجب علينا في البداية حساب عدد الحالات الكلية أو الملائمة سواءا طلب منا ذلك أو لم يطلب.

. وفي هذه الحالة تكون عدد الحالات الملائمة هو C_n^K أي:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3\times2\times1} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$

1- أ- حساب احتمال الحصول على نفس اللون:

« هذا يعني أنه إما لدينا 3 حمراء ألوغ (C_3^3) أو 3 خضراء ألوغ (C_3^3) أو 3 بيضاء ألوغ (C_4^3) » وعليه فإن:

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1+1+4}{120} = \frac{6}{120} \longrightarrow \boxed{P(A) = \frac{6}{120}}$$

ب- حساب احتمال الحصول على الألوان الثلاثة:

« هذا يعني أنه لدينا 1 حمراء ألوغ (C_3^1) و 1 خضراء ألوغ (C_3^1) و 1 بيضاء ألوغ (C_4^1) » ومنه فإن:

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{3 \times 3 \times 4}{120} = \frac{36}{120} \longrightarrow \boxed{P(B) = \frac{36}{120}}$$

جـ- حساب احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟ :

« وهذا يعني أن إما **واحدة** بيضاء ألوغ $(C_4^1 \times C_6^2)$ **أو** **2** بيضاء ألوغ $(C_4^2 \times C_6^1)$ أو **3** بيضاء ألوغ $(C_4^3 \times C_6^0)$ » ومنه فإن :

$$P(C) = \frac{C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 + C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 15 + 6 \times 6 + 4}{120}$$

$$= \frac{100}{120}.$$

ومنه :

$$\boxed{P(C) = \frac{100}{120}}$$

يمكن حساب هذا الاحتمال كما يلي : (طريقة ثانية) :

$$P(C) = 1 - \frac{C_6^3}{120} = 1 - \frac{20}{120} = \frac{100}{120} \longrightarrow \boxed{P(C) = \frac{100}{120}}$$

حيث الاحتمال $\frac{20}{120}$ أو $\frac{C_6^3}{120}$ يمثل احتمال عدم الحصول على **أية** كرية بيضاء (أي الاحتمال التقيضي) .

2- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يوفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

- لاحظ أنه إذا أدخلت يدك في الكيس لسحب 3 كرات في آن واحد فإنك إما لا تجد كرية بيضاء من بين الكرات الثلاثة المسحوبة ألوغ $(X=0)$ أو تجد واحدة فقط بيضاء ألوغ $(X=1)$ أو تجد اثنان ألوغ $(X=2)$ أو تجد ثلاثة بيضاء ألوغ $(X=3)$.

- وبالتالي فإن قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

P- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

X	0	1	2	3
P(X)	P(X=0)	P(X=1)	P(X=2)	P(X=3)

- ديما وديما كي يقولك أكتب أو عوق أو ماهو قانون الاحتمال ألوغي مباشرة أنشأ جدولاً يحتوي على سطرين (السطر الأول لـ X والسطر الثاني لـ P(X)) ثم أحسب جميع الاحتمالات الموافقة لقيم X المختلفة وضعها في الجدول.

- حيث:
- P(X=0) هو احتمال ما كاتش ولا كرية بيضاء.
- P(X=1) هو احتمال كرية بيضاء واحدة.
- P(X=2) هو احتمال كريتان بيضويتان.
- P(X=3) هو احتمال ثلاثة كريات بيضاء.

وعليه فإن:

$$\bullet\ P(X=0)=\frac{C_4^0\times C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1\times 20}{120}=\frac{20}{120}.$$

$$\bullet\ P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{4\times 15}{120}=\frac{60}{120}.$$

$$\bullet\ P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{6\times 6}{120}=\frac{36}{120}.$$

$$\bullet\ P(X=3)=\frac{C_4^3\times C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4\times 1}{120}=\frac{4}{120}.$$

- حذاري لازم تتأكد من أن:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

- وعليه فإن قانون الاحتمال لـ X هو:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

ب- حساب الأمل الرياضي E(X): لدينا:

$$E(X)=\sum_i X_i\ P(X_i)$$

ومنه فإن :

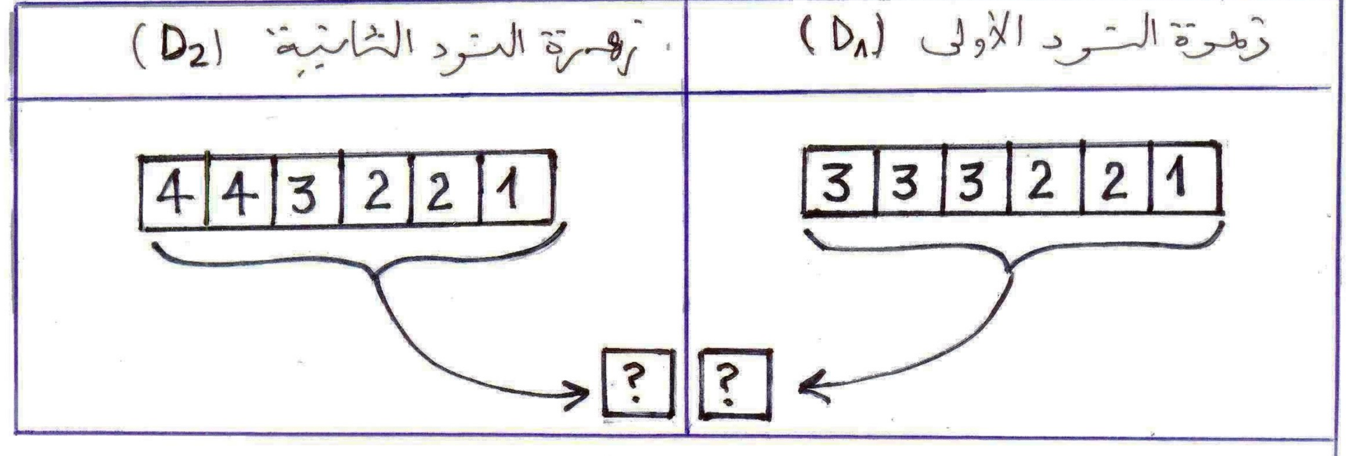
$$E(X) = 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120} = \frac{144}{120}$$

ومنه :

$$\boxed{E(X) = \frac{144}{120} = 1,2}$$

حل التمرين الثاني:

- لدينا زهرتي نرد (D_1) و (D_2) حيث :



- ديماوديما في حالة زهرتي نرد رميتا في آن واحد فإن عدد الحالات الكلية أو الملائمة هو $C_6^1 \times C_6^1$ ويساوي 36 .

أ- حساب احتمال أن يكون **الرقمان** المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين ، **زوجيين** :

- بالنسبة لـ D_1 لدينا وجهان زوجيان أي : (2،2) ألوغ (C_2^1) .
- بالنسبة لـ D_2 لدينا أربعة وجوه زوجية أي : (4،4،2،2) ألوغ (C_4^1)

ومنه :

$$P(A) = \frac{C_2^1 \times C_4^1}{36} = \frac{2 \times 4}{36} = \frac{8}{36} \longrightarrow \boxed{P(A) = \frac{8}{36}}$$

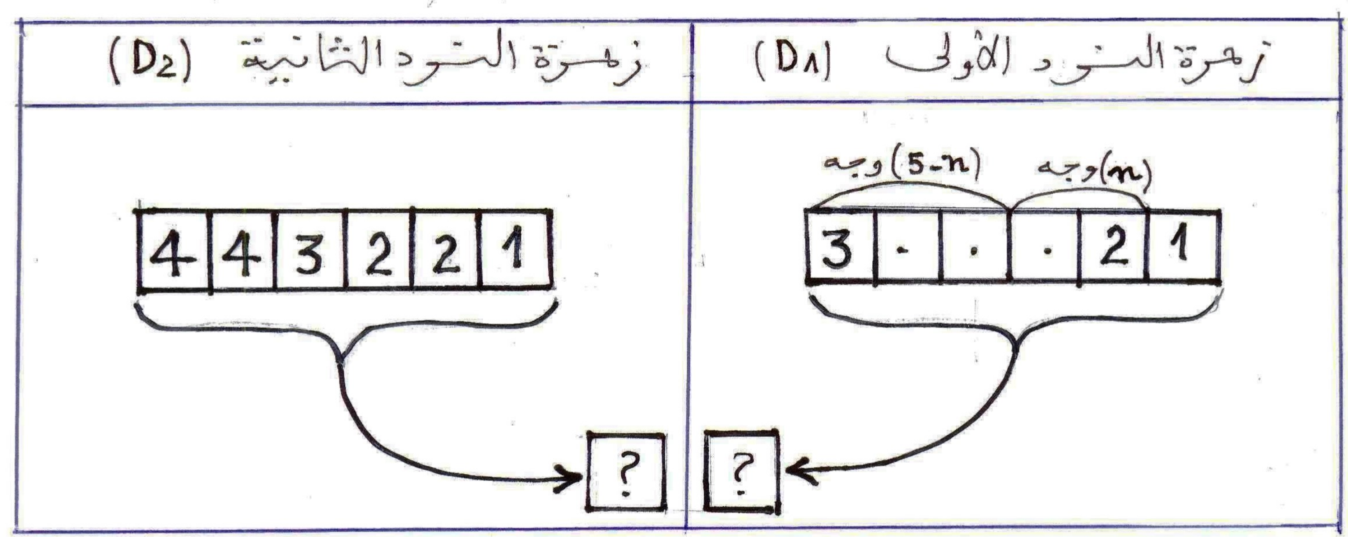
ب- حساب احتمال أن يكون **الرقمان فرديان** :

- بالنسبة لـ D_1 لدينا أربعة وجوه فردية أي (3،3،3،1) ألوغ (C_4^1) .
- بالنسبة لـ D_2 لدينا وجهان فرديان أي (3،1) ألوغ (C_2^1) ومنه :

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_2^1}{36} = \frac{4 \times 2}{36} = \frac{8}{36} \longrightarrow \boxed{P(B) = \frac{8}{36}}$$

حل التمرين الثالث:

- لدينا زهرتي نرد (D_1) و (D_2) حيث :



1- تعيين قيمة n حتى يكون احتمال الحادثة $(X = 6)$ يساوي $\frac{7}{36}$

- لدينا (D_1) يتكون من (n) وجه يحمل الرقم (2) وبالتالي فإن الباقي هو $(6 - 1 - n)$ يحمل الرقم (3) وبالتالي نكتبها في الشكل $(5 - n)$.
- إن المتغير العشوائي X في هذا التمرين هو عبارة عن مجموع الرقمان الظاهران في الوجهين العلويين للزهرتين.
- وبالتالي فإن : $X = 6$ يعني أن مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 6 وعليه فإن الاحتمالات الممكنة هي :

(D_2)		(D_1)
4	و	2
	أو	
3	و	3

ومنه فإن :

$$P(X=6) = \frac{C_n^1 \times C_2^1 + C_{5-n}^1 \times C_1^1}{C_6^1 \times C_6^1} = \frac{n \times 2 + 5 - n}{36} = \frac{7}{36}$$

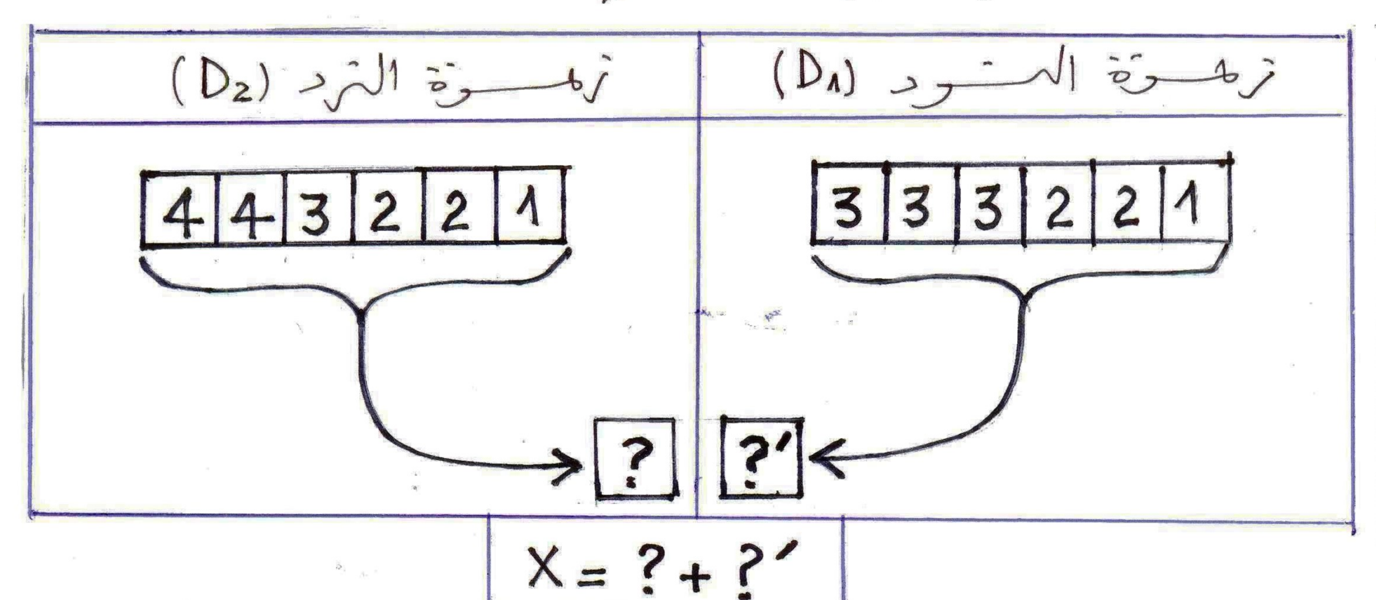
ومنه فإن :

$$2n + 5 - n = 7 \longrightarrow n + 5 = 7 \longrightarrow n = 7 - 5 = 2 \longrightarrow \boxed{n = 2}$$

ومنه فإن عدد الأوجه التي تحمل الرقم (2) في زهرة النرد (D_1) هو: وجهان وبالتالي تبقى ثلاثة أوجه تحمل الرقم (3) .

2- نختار الآن $n = 2$ في بقية التمرين :

ومنه فإنه لدينا :



$X = ? + ?'$

P- تعريف قانون الاحتمال وحساب الأمل الرياضي $E(X)$:

- إن المتغير العشوائي X هو مجموع الرقمين الظاهرين وعليه فإن X قد يكون إما : 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 أو 7 ومنه فإن :

X	2	3	4	5	6	7
P(X)	P(X=2)	P(X=3)	P(X=4)	P(X=5)	P(X=6)	P(X=7)

حيث لدينا :

$$\bullet P(X=2) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{1}{36}.$$

$$\bullet P(X=3) = \frac{C_1^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{1\times 2 + 2\times 1}{36} = \frac{4}{36}.$$

$$\bullet P(X=4)=\frac{C_1^1C_3^1+C_2^1C_2^1+C_1^1C_1^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{3+4+1}{36}=\frac{8}{36}.$$

$$\bullet P(X=5)=\frac{C_2^1C_3^1+C_1^1C_2^1+C_2^1C_1^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{6+2+2}{36}=\frac{10}{36}.$$

$$\bullet P(X=6)=\frac{C_1^1C_3^1+C_2^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{3+4}{36}=\frac{7}{36}.$$

$$\bullet P(X=7)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{2\times 3}{36}=\frac{6}{36}.$$

ومنه فإن قانون احتمال X هو :

X	2	3	4	5	6	7
P(X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{6}{36}$

ويكون الأمل الرياضي E(X) هو :

$$\bullet E(X)=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{4}{36}+4\times\frac{8}{36}+5\times\frac{10}{36}+6\times\frac{7}{36}+7\times\frac{6}{36}$$

$$=5 \longrightarrow \boxed{E(X)=5}$$

ب- حساب التباين V(X) :

$$\boxed{V(X)=\sum P_i\,[X_i-E(X)]^2}$$

$$\bullet E(X)=\frac{1}{36}[2-5]^2+\frac{4}{36}[3-5]^2+\frac{8}{36}[4-5]^2+\frac{10}{36}[5-5]^2+$$

$$+\frac{7}{36}[6-5]^2+\frac{6}{36}[7-5]^2=\frac{9}{36}+\frac{16}{36}+\frac{8}{36}+\frac{7}{36}+\frac{24}{36}=1,77$$

ومنه:

$$\boxed{V(X)=1,77}$$

* حساب الانحراف المعياري: $\sigma(X)$

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$$

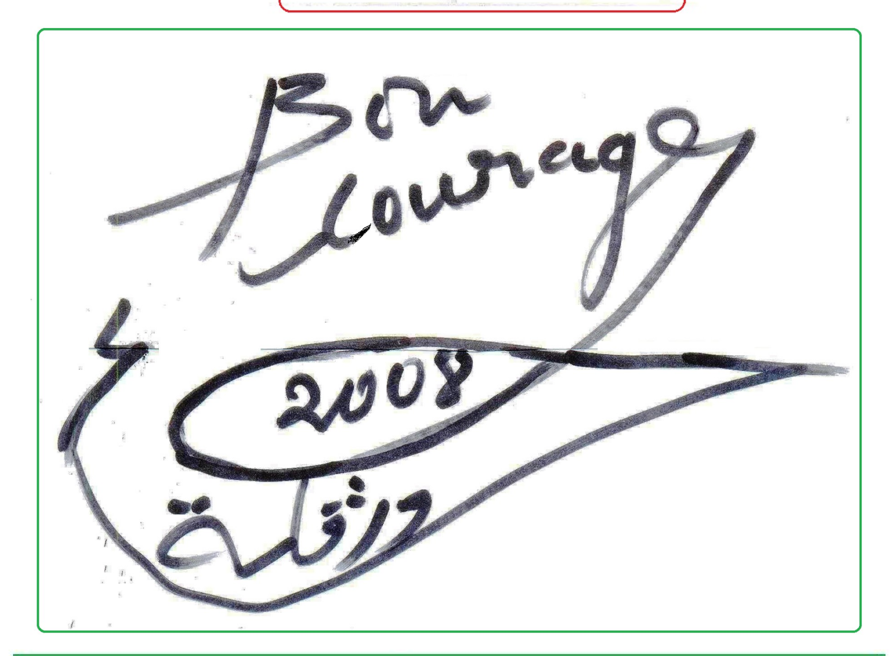
ومنه يأتي:

$$\sigma(X)=\sqrt{1,77}=1,33 \longrightarrow \boxed{\sigma(X)=1,33}$$

ملاحظات د جميلة:

$$\boxed{C_n^{n-1}=n} \quad \boxed{C_n^1=n} \quad \boxed{C_n^n=1}$$

$$\boxed{C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$



مع تحيات الأستاذ القـــد